Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

→ Inhalt

Der Hauptsatz sagt kurz aus: Wenn wir die Stammfunktion *F(x)* von *f(x)* ableiten, kommt wieder unsere Ausgangsfunktion *f(x)* heraus.

(1) ***[F(x)]' = f(x)***

Oder: **Die Integralrechnung ist die Umkehrung der Differenzialrechnung!**

Um eine Stammfunktion zu bestimmen, müssen wir also „nur" „aufleiten", die Kontrolle übernimmt dann der Hauptsatz: Beim Ableiten der Stammfunktion F(x) erhalten wir wieder f(x).

Wie hängt der Hauptsatz mit der Integralfunktion $J_a(x)$ zusammen? Nun, der Hauptsatz sagt gerade aus, dass **jede** Integralfunktion $J_a(x)$ einer Funktion f(x) Stammfunktion von f(x) ist mit der Kernaussage (1) oben, also: ***[F(x)]' = f(x)***

Eine kurze (!) Beweisskizze: Wir müssen die Aussage (1) zeigen, fangen auf der linken Seite an (→ *[F(x)]'*), und bilden den Differenzenquotient:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

Der Zähler *F(x+h) – F(x)* ist ein bestimmtes Integral in den Grenzen [x,x+h], dessen Flächeninhalt wir geschickt einschachteln:

$$h \cdot f(x_1) \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq h \cdot f(x_2)$$

wobei

- $f(x_1)$ der kleinste Funktionswert
- $f(x_2)$ der größte Funktionswert

im Intervall [x,x+h] ist. Nach Division durch h haben wir folgende Ungleichung:

$$f(x_1) \leq \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} \leq f(x_2)$$

Ersetzen wir das Integral durch die Differenz der Werte der Stammfunktion *F(x)*, so erhalten wir:

$$f(x_1) \leq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq f(x_2)$$

Für h → 0 gilt: $f(x_1) \to f(x)$ bzw. $f(x_2) \to f(x)$, Übergang zum Grenzwert ergibt also die Ungleichung

$$f(x) \leq [F(x)]' \leq f(x)$$

und dies war die Behauptung!

Link zu dieser Beweisskizze: http://mathenexus.zum.de/html/analysis/integral_grundlegendes/Hauptsatz.htm (http://mathenexus.zum.de/html/analysis/integral_grundlegendes/Hauptsatz.htm)

Der Hauptsatz liefert uns nebenbei eine Lösung des Flächeninhaltsproblems: Es ist ja

$J_a(x)$ = F(x) – F(a) (Warum?)

also mit x=b:

$J_a(x)$ = F(b) – F(a)

Wir halten fest:

$$(2)\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Beispiel

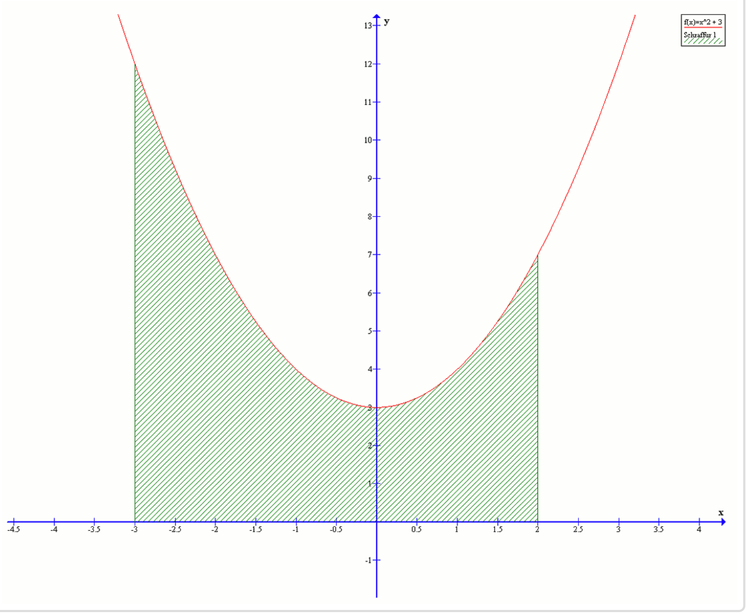
[↑]

Gegeben sei die Funktion **f(x) = x^2 + 3**, gesucht ist der Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion **G_f** und der x-Achse im Intervall I = [-3;2]

Stammfunktion:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 3x$$

Der Graph:



(http://www.wspiegel.de/upl/nawi_hauptsatz.gif)

Die Rechnung:

$$A = \int_{-3}^{2} x^2 + 3\,dx$$

$$= [\frac{x^3}{3} + 3x]_{-3}^{2} = (\frac{2^3}{3} + 6) - (\frac{(-3)^3}{3} - 9)\ FE = (8\,\frac{2}{3} - (-9 - 9)\ FE = 8\,\frac{2}{3} + 18\ FE = 26\,\frac{2}{3}\ \ FE$$

Vorsicht mit dem **Minuszeichen** zwischen *F(b)* und *F(a)*: **unbedingt Klammern setzen!**