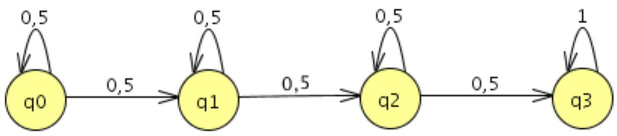
Zustandsänderungen

Wir gehen von folgender Problemstellung aus: Ein Chip ist auf einer Seite mit 0 und auf der anderen mit 1 beschriftet. Er wird so lange geworfen, bis die Summe der Einzelergebnise > **2** ist (also mind. 3). Ein Diagramm zu diesem Spiel:



Die Zustände zählen hier die jeweilige Anzahl der Einsen. Aus dem letzten Zutsand kommen wir nicht mehr heraus. Man nennt so einen Zustand auch einen **absorbierenden Zustand**. Der Zustandverteilung (s. Tabelle)

Zustandsverteilung

Zustand	0	1	2	3
Start:	**1**	**0**	**0**	**0**
1. Spiel:	**0.5**	**0.5**	**0**	**0**
2. Spiel:	**0.25**	**0.5**	**0.25**	**0**
3. Spiel:	**0.125**	**0.375**	**0.375**	**0.125**

entnehmen wir, dass die Wahrscheinlichkeiten Schritt für Schritt "nach rechts wandern". Die **zentrale Frage** ist nun:

Wie entwickelt sich diese Zustandsverteilung "auf lange Sicht"?

Alternativ können wir auch fragen: Welche Wahrscheinlichkeit hat der **absorbierende Zustand** $\mathbf{q_3}$ "auf lange Sicht". Zur Beantwortung dieser Fragen untersuchen wir die vier Gleichungen

- $\mathbf{v_0' = 0.5 * v_0}$
- $\mathbf{v_1' = 0.5 * v_0 + 0.5 * v_1}$
- $\mathbf{v_2' = 0.5 * v_1 + 0.5 * v_2}$
- $\mathbf{v_3' = 0.5 * v_2 + v_3}$

Wir machen die vier Gleichungen "etwas komplizierter":

- $\mathbf{v_0' = 0.5 * v_0 + 0 * v_1 + 0 * v_2 + 0 * v_3}$
- $\mathbf{v_1' = 0.5 * v_0 + 0.5 * v_1 + 0 * v_2 + 0 * v_3}$
- $\mathbf{v_2' = 0 * v_0 + 0.5 * v_1 + 0.5 * v_2 + 0 * v_3}$
- $\mathbf{v_3' = 0 * v_0 + 0 * v_1 + 0.5 * v_2 + 1.0 * v_3}$

Das sieht in etwa so aus: Wir erhalten die Folgewahrscheinlichkeiten der Zustände, indem wir die Zustandswahrscheinlichkeiten mit einem **"Zahlenfeld"** multiplizieren. Das Zahlenfeld nennt man auch

Matrix, und die Matrix sieht in unserem Fall folgendermaßen aus:

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Jetzt werden wir "mutig" und schreiben die linke Seite so:

$$\begin{pmatrix} v_0' \\ v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix}$$

Man nennt dieses Zahlenfeld mit nur einer Spalte einen **Vektor**, eben den Vektor der Folgewahrscheinlichkeiten. Unser Anfangszustand als Vektor geschrieben sieht dann so aus:

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die vielen Multiplikationen $*$ im Gleichungssystem oben schreiben wir jetzt so:

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

und als Ergebnis erhalten wir endlich:

$$\begin{pmatrix} v_0' \\ v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

also die Zeile in der Zustandstabelle oben zum 1. Spiel. Hier die Multiplikation zur Zeile des 2. Spiels:

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0.25 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie die Multiplikation zur Zeile des 3. Spiels:

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0.25 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.375 \\ 0.375 \\ 0.125 \end{pmatrix}$$

Etwas Nachdenken ergibt, dass wir hier fortgesetzt **Matrizen mit Vektoren multiplizieren** (die zueinander "passen" müssen!). Das geht auch "einfacher":

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.375 \\ 0.375 \\ 0.125 \end{pmatrix}$$

Das liest man **von rechts nach links**: die 1. Multiplikation ergibt die Zeile zum 1. Spiel, die 2. Multiplikation ergibt die Zeile zum 2. Spiel, die 3. Multiplikation ergibt die Zeile zum 3. Spiel, u. s. w. Jetzt führen wir Buchstaben ein: Die Matrix bekommt den Buchstaben **U**, die Vektoren den Buchstaben **v**, dann sieht die Zeile eben so aus:

$$\mathbf{U} * \mathbf{U} * \mathbf{U} * \mathbf{v} = \mathbf{v}'$$

wobei v' hier die Zustandswahrscheinlichkeiten nach dem dritten Spiel bezeichnet. Kürzer schreiben wir für **U** * **U** * **U** einfach $\mathbf{U}^3$ (Potenz!) und es ergibt sich:

$$\mathbf{U}^3 * \mathbf{v} = \mathbf{v}'$$

Der Ausdruck

$$\mathbf{U}^{20} * \mathbf{v} = \mathbf{v}'$$

steht dann für die Zustandswahrscheinlichkeiten nach dem 20. Spiel, aber wer soll das berechnen?

Unser Modell hat folgende **drei Eigenschaften**:

- es hat **endlich viele Zustände**
- die **Übergangswahrscheinlichkeiten sind zeitlich unveränderlich** und
- wir kennen die **Startverteilung der Zustandwahrscheinlichkeiten**

Ein solches Modell hat den Namen **MARKOW-Kette**, und -siehe oben- MARKOW-Ketten lassen sich durch Graphen beschreiben. Die Matrix zur Beschreibung von Zustandsänderungen bezeichnet man auch als **stochastische Matrix**, sie hat die **Eigenschaft**: Die Spaltensumme ist jeweils **1**!

- Das Thema findet sich im *Cornelsen* auf den Seiten 220 - 226, beachte insbesondere die
    - Aufgaben auf S. 224 - 226!
